

1. Ein allgemeines Lebensversicherungsmodell

1.1 Einleitung und Fragestellung

Betrachtet man die angebotenen Lebensversicherungsprodukte, stellt man unschwer fest, dass sich diese Produkte durch eine grosse Reichhaltigkeit auszeichnen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Produkten sind für den Laien nur schwer feststellbar. Dies hängt damit zusammen, dass die Lebensversicherungsindustrie eigentlich abstrakte Werte verkauft.

Man kann eine Lebensversicherung immer als Wette auffassen; je nach dem Ausgang dieser Wette bekommt man eine Leistung oder man bezahlt die Versicherungsprämie ohne Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft. Aus diesem Sichtwinkel heraus kann man die Lebensversicherungsmathematik als einen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten.

Da eine Lebensversicherung sich immer mit geldwerten Leistungen und Prämien befasst, ist sie auch ein Teil des Finanzmarktes und der Ökonomie. In diesem Zusammenhang ist besonders herauszuheben, dass Versicherungstypen, die Leistungen versprechen, welche sich an einem Fonds messen, auch die moderne Finanzmarkttheorie verwenden.

Aus dem Sichtwinkel des Juristen ist eine Lebensversicherung ein mehrseitiger Vertrag, in welchem sich der Versicherungsnehmer und der Versicherer gegenseitig verpflichten.

Wie wir oben gesehen haben, zeichnen sich Versicherungen einerseits durch ihr abstraktes Wesen und andererseits durch ihre Vielfalt aus. Da etwas Abstraktes versprochen wird, ist der Preis einer Versicherung nicht intuitiv klar. Im Gegensatz zu einem Laib Brot kaufen wir vielleicht ein- bis zweimal in unserem Leben eine Lebensversicherung.

Der Charakter einer Lebensversicherung — und hier spreche ich vor allem für die Einzelversicherung — ist durch ein sehr langfristiges Vertragsverhältnis gekennzeichnet. Denken wir zum Beispiel an einen 30jährigen Mann, welcher sich eine Altersrente kauft und nehmen wir weiter an, dass er im neunzigsten Altersjahr stirbt: In diesem Falle beträgt die Vertragsdauer 60 Jahre.

Bedingt durch die Langfristigkeit der Verträge und die dabei eingegangenen Risiken – ich denke hier z.B. an sich ändernde Grundlagen – ist es nötig, den Preis der Versicherung sorgfältig und vorausschauend zu bestimmen.

In diesem Kapitel wollen wir einerseits die klassischen Versicherungstypen kennenlernen und gleichzeitig ein allgemeines Versicherungsmodell vorstellen, mit welchem ein Grossteil der angebotenen Versicherungen tarifiert werden kann.

1.2 Beispiele

Als Erstes wollen wir die wichtigsten Typen und Finanzierungsarten, welche in der Lebensversicherungsindustrie Anwendung finden, beschreiben:

1.2.1 Lebensversicherungstypen

Das Charakteristikum einer jeden Lebensversicherung ist die Tatsache, dass das versicherte Ereignis eng mit dem Gesundheitszustand des Versicherten verbunden ist. Man unterscheidet zwischen den folgenden grundlegenden Typen:

- Versicherungen auf das Leben oder den Tod,
- Erwerbsunfähigkeitsversicherungen,
- Krankenversicherungen.

Für die Versicherungen auf das Leben oder den Tod ist die charakteristische Eigenschaft der versicherten Person, ob sie zu einem bestimmten Zeitpunkt noch am Leben oder aber tot ist. Es kann weiter nach der Todesursache unterschieden werden. (z.B. eine Todesfallversicherung, welche nur bei Unfalltod fällig wird.) Zu der Familie der Todes- und Erlebensfallversicherungen gehören insbesondere die verschiedenen Typen von Alters- und Hinterbliebenenrenten.

Bei den Erwerbsunfähigkeitsversicherungen ist das entscheidende Kriterium die Frage, ob die versicherte Person zu einem bestimmten Zeitpunkt invalid ist. Eine Besonderheit der Erwerbsunfähigkeitsversicherung ist die Tatsache, dass der Versicherungsnehmer auch nur teilweise (z.B. zu 50%) invalid sein kann.

Bei den Krankenversicherungen hängt die Auszahlung einer Leistung vom Gesundheitszustand ab. Zu dieser Kategorie der Lebensversicherung gehören neben den klassischen Produkten, auch modernere Typen wie Long Term

Care. Diese letztere Versicherung bezahlt dann Leistungen, wenn die versicherte Person nicht mehr in der Lage ist, bestimmte Grundbedürfnisse (wie z.B. sich ankleiden) selber zu erfüllen.

Neben der Unterscheidung der Versicherung nach dem zu versichernden Ereignis kann man auch nach der Erbringung der Leistung unterscheiden. Leistungen können als Renten oder in Kapitalform versichert werden.

Im Folgenden wollen wir einige typische Beispiele von Lebensversicherungen beschreiben:

Altersrente: Bei der Altersrente auf ein Leben bezahlt der Versicherer, nach Erreichen des Schlusalters bis zum Tod in periodischen Abständen eine Rente. Normalerweise werden die Renten monatlich, vierteljährlich oder jährlich ausbezahlt. Man unterscheidet weiterhin zwischen vorschüssigen (zu Beginn jeder Periode) und nachschüssigen (am Ende jeder Periode) Renten. Da die Rente nach dem Tod erlischt, ist es möglich, eine Garantzeit zu vereinbaren. In diesem Falle wird die Rente mindestens während der Garantiedauer ausbezahlt. (Diese Art der Rente kommt dem Bedürfnis nach, sicher etwas für sein Geld zurückzubekommen.)

Erlebensfallversicherung: Bei der Erlebensfallversicherung bezahlt der Versicherer dem Versicherten nach Erreichen des Schlusalters ein Kapital, wenn er zu diesem Zeitpunkt noch lebt. Andernfalls wird nichts bezahlt.

Todesfallversicherung: Die Todesfallversicherung ist das eigentliche Gegenstück zur Erlebensfallversicherung. Im Gegensatz zu letzterer erhält die versicherte Person beim Erleben des Schlusalters nichts. Bei einem vorzeitigen Tod erhalten die Erben der versicherten Person das vereinbarte Kapital. Ein Spezialfall der Todesfallversicherung ist die lebenslängliche Todesfallversicherung. Bei dieser Versicherungsart erhalten die Erben der versicherten Person beim Ableben ein Kapital, auch wenn die versicherte Person dann schon sehr alt war. Da man die lebenslänglichen Todesfallversicherungen auch als Investment für seine Kinder betrachten kann, genießt dieser Typ der Versicherung in einigen Ländern eine grosse Beliebtheit.

Gemischte Versicherung: Die Gemischte Versicherung ist das klassische Beispiel einer Lebensversicherung. Es handelt sich hierbei um eine Mischung zwischen der Erlebensfall- und der Todesfallversicherung. Dies bedeutet, dass sowohl beim vorzeitigen Tod als auch im Erlebensfall ein vereinbartes Kapital fällig wird.

Witwen- / Witwerrente: Im Gegensatz zu den obigen Beispielen, in denen nur eine Person von Bedeutung war, müssen bei der Witwen- / Witwerrente zwei Personen betrachtet werden. Bei dieser Versicherungsart gibt es den Versicherungsnehmer (z.B. Ehemann) und die versicherte

Person (Ehefrau). Solange beide Personen am Leben sind, wird keine Leistung fällig. Beim Tod des Versicherungsnehmers erhält die versicherte Person eine Rente bis zu ihrem Tod, sofern sie zu diesem Zeitpunkt noch lebt. Auch bei dieser Versicherungsform können garantierte Leistungen vereinbart werden.

Waisenrente: Beim Tod des Vaters oder der Mutter erhält das Kind bis zu seiner Volljährigkeit oder seinem Tod eine Rente.

Versicherung auf zwei Leben: Bei den Versicherungen auf zwei Leben müssen, analog zu den Hinterbliebenenrenten, zwei Personen in Betracht gezogen werden. Es wird eine Leistung vereinbart, die je nach Zustand des Paares (Versicherungsnehmer, versicherte Person) $\in \{ (**), (*\dagger), (\dagger*), (\dagger\dagger) \}$ verschieden sein kann. Daraus wird ersichtlich, dass es sich bei der Hinterbliebenenrente um einen Spezialfall handelt. Auch hier können garantierte Renten vereinbart werden.

Rückgewähr: Die Rückgewähr ist eine Zusatzversicherung, welche oft zusammen mit Renten oder Erlebensfallversicherungen verkauft wird. Bei der Rückgewähr handelt es sich um eine Todesfallversicherung in der Höhe der bezahlten Beiträge, eventuell unter Verrechnung der bereits bezogenen Renten. Sie soll ein ähnliches Bedürfnis erfüllen wie die garantierten Renten.

Nachdem wir die wesentlichen Versicherungen auf das Leben und den Tod betrachtet haben, wenden wir uns noch kurz den Erwerbsunfähigkeitsversicherungen zu. Bei ihnen ist die Arbeitsfähigkeit ausschlaggebend. Es ist in diesem Zusammenhang erwähnenswert, dass die Invalidierungswahrscheinlichkeiten massgebend vom wirtschaftlichen Umfeld abhängen. Dies rührt daher, dass während einer Hochkonjunktur jedermann einen Arbeitsplatz findet. Auf der anderen Seite ist es so, dass körperlich angeschlagene Personen bei schwacher Konjunkturlage nur schwer Arbeit finden. Bei der Erwerbsunfähigkeit sind insbesondere die folgenden Versicherungsarten vertreten:

Invalidenrente: Nach Ablauf einer Wartefrist wird der versicherten Person bis zum Schlussalter (oder auch bis zum Tod) oder bis zur Wiedererlangung der Arbeitsfähigkeit eine Rente ausbezahlt. Im Falle einer Invalidenrente, welche nicht mit dem Schlussalter erlischt, spricht man von einer lebenslänglichen Invalidenrente. Der Grund für die Wartefristen liegt in der Tatsache, dass ein Grossteil der invaliden Personen kurz nach der Krankheit oder dem Unfall reaktiviert. Die Wartefrist verbilligt somit diesen Versicherungstypus. Typische Wartefristen sind drei oder sechs Monate und ein oder zwei Jahre.

Invaliditätskapital: Dieses Kapital wird bei voraussichtlich andauernder Invalidität ausbezahlt.

Prämienbefreiung: Die Prämienbefreiung ist eine Zusatzversicherung, welche bei Invalidität für den Versicherungsnehmer den Erlass der Prämie zur Folge hat. Auch bei diesem Versicherungstypus sind Wartefristen üblich.

Invalidenkinderrente: Die Invalidenkinderrente entspricht der Waisenrente mit dem Unterschied, dass nicht der Tod, sondern die Invalidität des Vaters oder der Mutter das auslösende Ereignis darstellt.

1.2.2 Finanzierungsarten

Nachdem wir die Leistungen des Versicherers betrachtet haben, ist es ebenfalls nötig, sich Gedanken über die Finanzierung dieser Leistungen und die zugrundeliegende Philosophie zu machen. Das Hauptprinzip der Lebensversicherung besagt, dass der Wert der Leistungen des Versicherers demjenigen des Versicherungsnehmers entspricht. Man muss sich natürlich fragen, was diese Äquivalenz bedeutet. Wir werden das Äquivalenzprinzip in den folgenden Kapiteln exakt definieren. Doch nun zurück zu den Finanzierungsmöglichkeiten:

- Finanzierung durch Prämien,
- Finanzierung durch Einmaleinlagen.

Bei der Finanzierung durch Prämien verpflichtet sich der Versicherungsnehmer, dem Versicherer bis zu einem bestimmten Zeitpunkt in regelmässigen Abständen eine Prämie zu zahlen. Die Prämienzahlung endet normalerweise im Schlussalter oder mit dem Tod der versicherten Person.

Die andere Möglichkeit zur Finanzierung einer Lebensversicherung besteht darin, eine einmalige Zahlung, d.h. eine Einmaleinlage oder Einmalprämie, zu bezahlen. Normalerweise wird eine Mischform gewählt.

1.3 Das Versicherungsmodell

In diesem Kapitel wollen wir das Versicherungsmodell darstellen, welches wir im Folgenden verwenden werden. Es versucht, die Realität in einem Modell abzubilden. Somit ist es wichtig, eine Klasse von Modellen zu betrachten, welche die gewünschte Flexibilität ermöglichen. Abbildung 1.1 zeigt das Versicherungsmodell. Hierbei stellen wir uns vor, dass die versicherte Person zu jedem Zeitpunkt t in einem Zustand $1, 2, \dots, n$ ist, wobei der Zustand 1 z.B. bedeuten kann, dass die Person am Leben ist. Der Zustand der versicherten Person ist durch den stochastischen Prozess X mit $X_t(\omega) \in S$ gegeben.

Durch das Bleiben in einem Zustand oder durch den Wechsel des Zustandes werden Zahlungen fällig, welche im Versicherungsvertrag festgehalten sind. Zu den Verbindungslinien in der Figur sind also Funktionen $a_i(t)$ und $a_{ij}(t)$ gegeben, welche den Betrag definieren, welchen die versicherte Person beim Bleiben im Zustand i ($a_i(t)$) oder beim Wechsel des Zustands von i nach j im Zeitpunkt t ($a_{ij}(t)$) erhält. Im Folgenden wollen wir die entsprechenden Konzepte einführen. Hierbei unterscheiden wir zwischen einem zeitstetigen Modell, bei welchem $(X_t)_{t \in T}$ auf einem Intervall von \mathbb{R} lebt, und einem zeitdiskreten Modell, bei welchem $(X_t)_{t \in T}$ auf einer Teilmenge von \mathbb{N} lebt. Der Grund für die Unterscheidung der beiden Modelle besteht darin, dass das stetige Modell die interessanteren Aussagen für die Theorie ergibt und das diskrete Modell für die Praxis sehr wichtig ist.

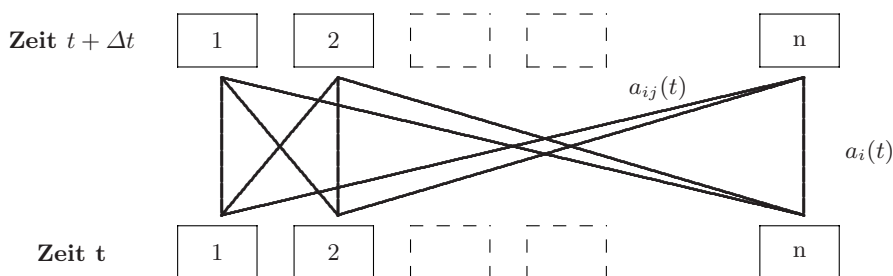


Abbildung 1.1. Vertragliche Situation zwischen t und $t + \Delta t$

Definition 1.3.1 (Zustände). *Im Folgenden bezeichnen wir mit S stets den Zustandsraum, der für die jeweilige Versicherung angewendet wird. S ist eine abzählbare Menge.*

Beispiel 1.3.2. Bei einer Todesfallversicherung auf ein Leben oder einer Gemischten Versicherung wählt man als Zustandsraum oft $S = \{*, \dagger\}$.

Beispiel 1.3.3. Bei einer Erwerbsunfähigkeitsversicherung muss man mindestens die folgenden Zustände betrachten: lebend (aktiv), tot und invalid. Oft betrachtet man jedoch noch mehr Zustände, um die Versicherung besser modellieren zu können. In der Schweiz wird z.B. ein Modell angewendet, welches ausser den Zuständen $\{*, \dagger\}$ ebenfalls die Familie der Zustände $\{\text{Person wurde mit } x \text{ Jahren invalid} : x \in \mathbb{N}\}$ betrachtet.

Nachdem wir die Zustände definiert haben, ist es nun möglich, die Leistungsversprechen mathematisch zu modellieren. Mit x und y wollen wir in Zukunft stets das Alter der versicherten Person oder das Policenjahr bezeichnen. Um

die Leistungsversprechen definieren zu können, ist es nötig, die Zeitachse genauer zu beschreiben. Da in der Praxis oft in diskreter Zeit gerechnet wird, aber die Theorie in stetiger Zeit die schöneren Resultate ergibt, werden wir zweigleisig weiterfahren.

Definition 1.3.4. – Mit $a_i(t)$ wollen wir die Summe der bis zum Zeitpunkt t ausbezahlten Beträge bezeichnen, falls wir wissen, dass der Versicherte immer im Zustand i war. $a_i(t)$ nennt man verallgemeinerte Rentenzahlungen. Falls diese Rentenfunktion von beschränkter Variation (s. Def. 2.1.5) ist, können wir auch $a_i(t) = \int_0^t da_i(s)$ schreiben.

- Mit $a_{ij}(t)$ bezeichnen wir die Zahlung, welche bei einem Zustandswechsel von i nach j zum Zeitpunkt t erfolgt. Diese Leistungen heissen verallgemeinerte Kapitalleistungen.
- Im Falle diskreter Zeit bezeichnen wir mit $a_i^{Pre}(t)$ die Rentenzahlung, welche zur Zeit t fällig wird, falls sich die Police zum Zeitpunkt t in i befindet.
- Im diskreten Modell bezeichnen wir mit $a_{ij}^{Post}(t)$ die Kapitalleistungen bei einem Übergang von i nach j zwischen t und $t + 1$. Wir wollen hierbei annehmen, dass die Zahlung am Ende des Intervalls erfolgt.

Der Unterschied bei den Funktionen $a_i(t)$ zwischen dem zeitstetigen und dem zeitdiskreten Modell besteht darin, dass beim ersten Modell $a_i(t)$ die Summe der Renten bezeichnet, welche bis zum Zeitpunkt t ausbezahlt werden, in Analogie zu einem Kilometerzähler bei einem Auto. Beim diskreten Modell bezeichnet $a_i^{Pre}(t)$ die einzelne Rente zur Zeit t .

Das folgende Beispiel verdeutlicht das Zusammenspiel zwischen dem Zustandsraum und den Vertragsfunktionen.

Beispiel 1.3.5. Betrachten wir die Gemischte Versicherung, bei welcher im Todesfall 200'000 Fr. und im Erlebensfall 100'000 Fr. fällig werden. Diese Versicherung sei mit einer Prämie finanziert, welche pro Jahr 2'000 Fr. beträgt.

Bei einem Schlussalter von 65 Jahren lauten die nicht trivialen Vertragsfunktionen wie folgt:

$$a_*(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < x_0, \\ -\int_{x_0}^x 2000 dt, & \text{falls } x \in [x_0, 65], \\ -(65 - x_0) \times 2000 + 100000, & \text{falls } x > 65, \end{cases}$$

$$a_{*\dagger}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < x_0 \text{ oder } x > 65, \\ 200000, & \text{falls } x \in [x_0, 65], \end{cases}$$

wobei wir mit x_0 das Eintrittsalter in die Versicherung, mit $*$ den Zustand lebend und mit \dagger den Zustand tot bezeichnen.